1.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a^2}{1+a^2}\right)^n$$

Como $a^2 < 1+a^2 \Rightarrow \frac{a^2}{1+a^2} < 1$, $\forall a \in R$

y por ello $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a^2}{1+a^2}\right)^n = 0$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\cdot\cos\left(\frac{a^2}{1+a^2}\right)^n = 0\cdot(\text{valor acotado}) = 0$$

ya que $|\cos x| \le 1$, $\forall x \in R$

---

2. Por ser $\operatorname{arc\,tg} x$ una función continua $\forall x \in R$

$$\lim_{n\to\infty}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{n^2+1}{n^2+3}\right)^n = \operatorname{arc\,tg}\left[\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+1}{n^2+3}\right)^n\right]$$

El límite que queremos calcular presenta la indeterminación 1^∞. Utilizamos la fórmula

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = e^{\lim_{n\to\infty} b_n(a_n-1)}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+1}{n^2+3}\right)^n = e^{\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{n^2+1}{n^2+3}-1\right)} = e^{\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{\cancel{n^2}+1-\cancel{n^2}-3}{n^2+3}\right)} =$$

$$= e^{\lim_{n\to\infty}\frac{-2n}{n^2+3}} = e^0 = 1$$

Por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{n^2+1}{n^2+3}\right)^n = \operatorname{arc\,tg} 1 = \frac{\pi}{4}$$

3.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{\sqrt{4n^4+1}}+\frac{n}{\sqrt{4n^4+2}}+\cdots+\frac{n}{\sqrt{4n^4+n}}\right)$$

El mayor de los n sumandos del término enésimo de la sucesión es el primero $\frac{n}{\sqrt{4n^4+1}}$ porque tiene el menor valor en el denominador y todos los numeradores son iguales.

El menor de los sumandos es el último.

Sustituyendo los n sumandos por el primero se obtiene una sucesión mayorante de la dada y por el último una minorante

$$n\cdot\frac{n}{\sqrt{4n^4+1}}\leq\frac{n}{\sqrt{4n^4+1}}+\frac{n}{\sqrt{4n^4+2}}+\cdots+\frac{n}{\sqrt{4n^4+n}}\leq n\cdot\frac{n}{\sqrt{4n^4+1}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{\sqrt{4n^4+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^2}{n^2}}{\frac{1}{n^2}\sqrt{4n^4+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{4n^4+1}{n^4}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{4+\frac{1}{n^4}}}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{\sqrt{4n^4+n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}\cdot n^2}{\frac{1}{n^2}\sqrt{4n^4+n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{4n^4+n}{n^4}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{4+\frac{n}{n^4}}}=\frac{1}{2}$$

Luego por la regla del sandwich el límite es $1/2$ //

4. $a_0 = 0$

$a_1 = 2$

$a_2 = 2+\sqrt{2}$ La sucesión parece ser monótona creciente. Lo demostraremos por el principio de inducción:

Comprobamos que $a_0 < a_1$, $0 < 2$ se cumple

Suponemos que $a_{n-1} < a_n$ y a partir de aquí vemos que

$\sqrt{a_{n-1}} < \sqrt{a_n}$ por ser la función raíz cuadrada ~~estrictamente~~ creciente

$$\underbrace{2+\sqrt{a_{n-1}}}_{= a_n} < \underbrace{2+\sqrt{a_n}}_{a_{n+1}}$$

luego hemos demostrado que $a_n < a_{n+1}$ a partir de la suposición $a_{n-1} < a_n$,

luego hemos demostrado que la sucesión es monótona creciente $\forall n \in N$.

Necesitamos justificar que la sucesión está acotada superiormente para poder concluir que converge.

NOTA.- Para encontrar una cota apropiada buscamos primero su límite.

Sabemos que $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n-1} = L$

Tomamos límites en la igualdad que define la recurrencia

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(2+\sqrt{a_{n-1}}\right)$$

se tiene por lo tanto

$$L = 2 + \sqrt{L}$$
$$L-2 = \sqrt{L}$$
$$(L-2)^2 = (\sqrt{L})^2$$
$$L^2 - 4L + 4 = L$$
$$L^2 - 5L + 4 = 0 \qquad L = \frac{5 \pm \sqrt{25-4 \cdot 1 \cdot 4}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} = \begin{cases} 4 \\ 1 \end{cases}$$

El límite no puede ser 1 porque la sucesión crece y $a_1 = 2$.

Vamos a demostrar por el principio de inducción que 4 es una cota superior de la sucesión

Comprobamos que $a_0 < 4$, $0 < 4$ se cumple

Suponemos que $a_{n-1} < 4$ y ahora razonamos

$$\sqrt{a_{n-1}} < \sqrt{4}$$
$$\underbrace{2 + \sqrt{a_{n-1}}}_{= a_n} < 2 + \sqrt{4} = 2 + 2 = 4$$

Hemos demostrado que $a_n < 4$, a partir de la suposición $a_{n-1} < 4$.

Luego 4 es una cota superior $\forall n \in N$

Luego la sucesión es monótona creciente y está acotada superiormente por 4, luego la sucesión es convergente.

El límite ya lo tenemos calculado y es 4.

5. Una serie de números reales es convergente cuando la sucesión de sus sumas parciales es convergente. El valor al que converge la sucesión es el valor suma de la serie convergente.

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ tiene como sucesión de sumas parciales $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$

$$S_1 = a_1$$
$$S_2 = a_1 + a_2$$
$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$
$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

si $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ la serie dada es convergente y se escribe que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$ es su suma.

---

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{1}{n}\right)$

Como $\lim_{n\to\infty} \cos\left(\frac{1}{n}\right) = \cos\left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\right) = \cos 0 = 1 \neq 0$

esta serie no cumple la condición necesaria de convergencia: que el límite de su término enésimo sea cero.

La serie no-converge.

$\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{2}{3}\right)^n$ aplicando el criterio de la raíz o de Cauchy se tiene $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n\left(\frac{2}{3}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}\,\sqrt[n]{\left(\frac{2}{3}\right)^n} = 1\cdot\frac{2}{3} < 1$

luego la serie converge.

7. $$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{n^{5/2}} \right|$$

Comparamos esta serie de términos no-negativos con la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{5/2}}$

$$\frac{\left|\operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right|}{n^{5/2}} \leq \frac{1}{n^{5/2}} \quad \forall n \text{ porque } |\operatorname{sen} x| \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

La serie magorante es una serie de Riemann convergente porque $p = \frac{5}{2} > 1$. Luego la serie dada es absolutamente convergente y por ello convergente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{n^n}{n!\, e^{2n}} \right| = \sum \frac{n^n}{n!\, e^{2n}}$$

Mediante el criterio del cociente o de D'Alembert

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!\, e^{2(n+1)}}}{\frac{n^n}{n!\, e^{2n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n \cancel{(n+1)}\, \cancel{n!}\, \cancel{e^{2n}}}{\cancel{n!}\, \cancel{(n+1)}\, \cancel{e^{2n}} \cdot e^2 \cdot n^n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n}{e^2 \cdot n^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{e^2} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \frac{1}{e^2} \cdot e = \frac{1}{e} < 1$$ la serie es absolutamente convergente y por ello convergente.

8. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n^2 \cdot 5^n}$$

Buscamos su radio de convergencia

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{(x-1)^{n+1}}{(n+1)^2\, 5^{n+1}}\right|}{\left|\frac{(x-1)^n}{n^2 \cdot 5^n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\cancel{(x-1)^n}(x-1)\cdot n^2 \cdot \cancel{5^n}}{(n+1)^2 \cdot \cancel{5^n} \cdot 5 \cdot \cancel{(x-1)^n}} \right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n^2 (x-1)}{5 \cdot (n+1)^2} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{|x-1|}{5} = \frac{|x-1|}{5}$$

Este límite tiene que ser menor que 1

$$\frac{|x-1|}{5} < 1 \Rightarrow \boxed{|x-1| < 5} \Rightarrow -5 < x-1 < +5 \Rightarrow$$

$$-4 < x < 6$$

El centro de la serie es el punto 1 y su radio de convergencia es 5.

Para precisar el campo de convergencia tenemos que ver qué pasa en $x=6$ y en $x=-4$ que son los extremos del intervalo

En $x=6$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(6-1)^n}{n^2 \cdot 5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ es la serie de Riemann con $p=2>1$, luego la serie converge

En $x=-4$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4-1)^n}{n^2 \cdot 5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \cancel{5^n}}{n^2 \cdot \cancel{5^n}}$ esta serie es absolutamente convergente y por lo tanto convergente

El campo de convergencia es $[-4, 6]$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{n-1}}{n\cdot 5^n}$$ esta es la serie derivada de la serie anterior, luego tiene el mismo radio de convergencia 5.

Para precisar el campo vemos qué ocurre en

$x=6$ $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(6-1)^{n-1}}{n\cdot 5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n-1}}{n\cdot 5^{n-1}\cdot 5} = \frac{1}{5}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

la serie armónica diverge, luego la serie dada no converge en $x=6$.

En $x=-4$ $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4-1)^{n-1}}{n\cdot 5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-5)^{n-1}}{n\cdot 5^{n-1}\cdot 5} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\cdot \cancel{5^{n-1}}}{n\cdot \cancel{5^{n-1}}\cdot 5} =$$

$$= \frac{1}{5}\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\cdot \frac{1}{n}$$

La serie alternada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ no es absolutamente convergente porque $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ es la serie armónica divergente. Pero puede ser condicionalmente convergente si cumple las hipótesis del criterio de Leibniz para series alternadas:

1. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

2. La sucesión $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ es monótona decreciente

$n < n+1 \implies \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$ es decir $a_n > a_{n+1}$

y esto ocurre $\forall n \in N$

Luego por el criterio de Leibniz la serie converge en $x=-4$

El campo de convergencia de esta serie es $[-4,+6)$, distinto del campo de convergencia de la serie anterior.

---

9. $$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3^n}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3^n}\right)+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}=$$

$$=2\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

Esto puede hacerse ~~mediante~~ aplicando las propiedades aritméticas de suma de series convergentes

La serie $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$ es una serie geométrica de razón $r=\frac{1}{3}<1$ y por ello convergente.

La serie $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$ es convergente según el criterio de Pringsheim

$\lim_{n\to\infty} n^{\alpha}\frac{1}{(n+1)(n+2)}=1$ si $\alpha=2>1$, luego la serie converge.

Hemos sacado factor común el 2 en la primera serie por la propiedad distributiva del producto respecto de

la suma de infinitos sumandos.

La serie dada es convergente porque es la suma de dos series convergentes,

$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$ se suma mediante la fórmula $S=\frac{a}{1-r}$

$$S=\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{\frac{2}{3}}=\frac{3}{2}$$

La serie telescópica

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$ se suma descomponiendo su término enésimo en dos sumandos

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{A}{n+1}+\frac{B}{n+2}=\frac{A(n+2)+B(n+1)}{(n+1)(n+2)}$$

Si $n=-2$ $\quad 1=-B$, $\boxed{B=-1}$

Si $n=-1$ $\quad \boxed{1=A}$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$

Buscamos el límite de la sucesión de sumas parciales

$$S_n=\left(\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{n}}-\cancel{\frac{1}{n+1}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{n+1}}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$S_n=1-\frac{1}{n+2} \qquad \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+2}\right)=1$$

Luego la suma de la serie dada será

$$S=2\cdot\frac{3}{2}+1=4$$